VÁLYI GYULA MATEMATIKA KÖR – HATVÁNYOK – V. OSZTÁLY
2018.11.12

1. Számítsuk ki a következő műveleteket:

a.) $10^3:5^2+10\cdot\left\{2^{10}:64+2^3\cdot\left[1035:\left(5\cdot3^2\right)-\left(2^{37}\cdot7^{37}\right)^2:\left(4^{36}\cdot49^{37}\right):2\right]\right\}$

b.) $2\cdot2^3\cdot3^2:18+5\cdot\left\{625:5^3+\left[\left(3\cdot3^2\cdot5^2\right)^{17}:\left(9^{25}\cdot25^{17}\right)+6^5:3^5\right]\cdot2^{3^0}\right\}$

c.) $\left[\left(2^5\right)^2+2^5+1\right]:\left[\left(2^2\right)^5+2\cdot2^4+2^8:2^8\right]$ $\quad 2^4\cdot5^4+2^8\cdot5^4 = 2^4\cdot5^4\left(1+2^4\right)=$

d.) $3^{77}:\left\{\left[\left(6^{50}\cdot15^{24}\right):2^{43}:5^{20}\right]:\left(2^7\cdot5^4+2^4\cdot10^4\right)+\left(2^{50}:2^{48}-1\right)^{73}+15^{73}:5^{71}\right\}$ $\quad = 2^4\cdot5^4\cdot3$

e.) $122-12\cdot\left\{183:\left[\left(2\cdot3^2\cdot5^3\right)^4:\left(2^4\cdot3^7\cdot5^{12}\right)+\left(2^8\right)^9:16^{18}-1^{27}\cdot5^0\right]-3^2\cdot\left(54-2^4\cdot3\right)\right\}$

f.) $\left\{\left\{\left\{\left[\left(1+2+3+...+100\right):1010\right]^{1000}\cdot5^{987}:5^{1986}\right\}^2-1\right\}:2^3-3\right\}\cdot\left(123\cdot456\cdot789\right)^{1001}+\left(1985-1984\right)^0\cdot10$

g.) $\left\{\left[\left(2^{5^{1^0}}+9^{0^{5^2}}+7^{1^{6^5}}\right):5^{3^{0^4}}\right]:\left(2^{1993}:2^{1990}\right)\right\}^{1994}+\left[\left(2^3\right)^2-1994^0\right]:3^{2^{1^{1993}}}-\left(1^{3^{4^5}}+11^{1^{2^5}}\right):2^{1^4}$

h.) $\left\{\left\{\left\{\left[\left(1+2+3+...+200\right):402\right]^{100}\cdot50^{1894}:50^{1994}\right\}^{1993}-1\right\}:5^{1992}\right\}\cdot\left(1991\cdot1990\cdot1989\right)^{1988}+\left(1988-1987\right)^0\cdot4$

i.) $3^{59}\cdot\left\{3^{40}+3\cdot\left[2\cdot3^{38}+3\cdot\left(3^{36}+9^{18}+27^{12}\right)\right]+\left(2^7\cdot3^{13}\right)^6:\left(8^7\cdot9^{10}\right)^2\cdot9\right\}:3^{100}$

j.) $3^{2^{3^2}}:[(3^{509}+3^{510}):4+(4^{2^5}:2^{62}-1)^{509}+3^{509}]$.

2. Adottak a következő számok: $x=\left[\left(2^3\right)^5+25^3-7^{35}:7^{20}\right]:\left(2^{15}-7^{15}+5^6\right)\cdot3^{26}$ és

$y=2^{101}:\left[\left(5^{171}:5^{170}-3\right)^{98}+2^{105}:\left(2^3\cdot2^4\right)+\left(2^{11}\right)^9\right]\cdot2^{38}$.

a.) Hasonlítsuk össze x-et és y-t.

b.) Határozzuk meg az x és y utolsó számjegyét.

3. Számítsuk ki a következő szám utolsó számjegyét $\left(\overline{abcd}\right)^{2005}$, ahol $a=b$, $c=2b$, $d=3c$ és $2^{9(2a-1)}=2^9$

4. Adottak a következő számok: $a=\left\{\left[10\cdot1000-\left(300-100\right)\cdot50\right]^{2000}+1\right\}^{2001}$,

$b=\left(2^2\cdot2^3\cdot2^4\right)^3-4\cdot\left(4^3\cdot4^4\cdot4^5\right)-2^{26}$ és $c=3\cdot4+5\cdot6-40$. Számítsuk ki a $c^a+c^b+c^c$ értékét.

5. Számítsuk ki a $(b-a)^{2012}$ értékét, ahol: $a=\left\{\left[\left(2^{5^{2^0}}+3^{0^{4^3}}+7^{1^{5^3}}\right):5^{2^{0^3}}\right]:\left(2^{1999}:2^{1996}\right)\right\}^{2000}$ és

$b=\left[\left(2^2\right)^3-2012^0\right]:3^{2^{1^4}}-\left(1^{2^{3^4}}+4^{1^{2^3}}\right)$.

6. Számítsuk ki az $A = a^2 + 3ab - 3ac + d^2$ szám értékét, ahol $a = 7$, $b - c = 10$ és
$$d = \left[2^{98} \cdot \left(2^3 \cdot 5\right)^{102}\right] : \left(16 \cdot 5 \cdot 2^{198} \cdot 25^{25}\right)^2 + 3^2 + 11 \cdot \left(1 + 2 + 3 + \ldots + 1999\right)^0$$

7. Mutassuk ki, hogy $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{100} + \left(16^2\right)^{631} = 5 \cdot 4^{2524}$

8. a.) Számítsuk ki az $S = 51 + 52 + \ldots + 150 + 151$ összeget.
b.) Írjuk fel a 101^n hatványt, ahol $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ 101 egymásutáni természetes szám összegeként.
c.) Írjuk fel az 1997^{1998} hatványt 1997 darab egymásutáni természetes szám összegeként.

9. Adottak $x = 2^{51} \cdot 2^{52} \cdot 2^{53} \cdot \ldots \cdot 2^{100}$ és $y = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{3774}$ számok. Számítsuk ki $y + 1$ és $x - y$ értékét.

10. Hasonlítsuk össze a következő hatványokat:
a.) $3^{454} - 3^{453} - 3^{452}$ és 5^{340}
b.) 2^{70} és $9 \cdot 27^{15} - 9^{23}$
c.) 10^{1983} és 2^{6620}
d.) 124^{50} és 26^{75}
e.) 234^{432} és 432^{234}
f.) $3^{2000} - 3^{1999} - 3^{1997}$ és $2^{2002} - 2^{2001} + 2^{1997}$
g.) 5^{51} és $2^{121} - 2^{120} - 2^{119}$

11. Adottak a következő számok: $A = 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^{1985}$, $B = \left(27^{331}\right)^{1985}$ és $C = 3^{1986} \cdot 3^{1987} \cdot \ldots \cdot 3^{n-1} \cdot 3^n$
a.) Hasonlítsuk össze az A és B számokat.
b.) Határozzuk meg az $n \in \mathbb{N}$ értékét úgy, hogy $A \cdot C = \left(27^{667}\right)^{1000}$

12. Rendezzük csökkenő sorrendbe az
$x = 2^{883} - 2^{882} - 2^{881}$ $\quad y = 5^{442} - 2^2 \cdot 5^{441} - 3 \cdot 5^{440}$ $\quad z = 18 \cdot \left[\left(3^2\right)^9\right]^{49}$ számokat.

13. Rendezzük növekvő sorrendbe:
$x = 2^{1653} - 2^{1652} - 2^{1651}$, $y = 3^{993} - 2 \cdot 3^{992} - 2 \cdot 3^{901} - 3^{990}$ és $z = 7^{662} + 9 \cdot 7^{660} - 8 \cdot 7^{661}$ számokat.

14. Határozzuk meg az $A = 2^{4n+1} \cdot 5^{4n+5} - 3$ szám számjegyeinek számát és számjegyeinek összegét.

15. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:
a.) $x : 2^{998} - 2^{999} = 2^{1000}$
b.) $\left(1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \ldots + 2^{98}\right) \cdot x = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{100}$

16. Határozzuk meg x-et az alábbi egyenlőségből:

17. $a^1 + a^2 + a^3 + \ldots a^{2000} + 2^{2001} \cdot x = \left(c - b\right)^{2002} - 2$, ahol a, b, c teljesítik a következő összefüggést:
$3 \cdot \left(a + b\right) = \overline{ab} = 3c$

18. Mutassátok ki, hogy ha: $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{95}$ akkor $a \vdots 15$

19. Határozzuk meg az utolsó számjegyét a következő számoknak:
$A = 1^{2008} + 9^{2010} + 8^{2012} + 6^{2014}$, $B = 113^{405} + 114^{4003} \cdot 115^{4003} \cdot a^{4003} + 116^{405}, a \in \mathbb{N}$

20. Határozzuk meg az $a = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2007}$ szám utolsó számjegyét és mutassuk ki, hogy osztható 41-gyel.

21. Határozzuk meg az $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n + 2004^{n^2}$ szám utolsó számjegyét, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

22. Írjuk fel a 61-et és a 61^{2n+1}-et három négyzetszám összegeként, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.